# بحثی درباب عددهای اول

**عباس قلعه‌پور اقدم**
دبیر ریاضی ارومیه

**اشاره**

**در این مقاله می‌خواهیم دربارهٔ دسته‌ای از عددهای طبیعی به‌نام عددهای اول که شاید از بحث‌برانگیزترین و به نوعی جالب‌ترین عددهای طبیعی هستند، مطالبی را بیان کنیم. عددهایی که مطالعه روی آن‌ها جذابیت خاصی برای ریاضی‌دانان دارد و همواره علاقه و کنجکاوی آنان را طی قرن‌ها برانگیخته‌اند. از جمله ریاضی‌دانان برجسته‌ای که در این عرصه تلاش کرده‌اند، در عصر قدیم می‌توان به *فیثاغورس* (۵۰۰-۵۶۹ ق.م.)، *اقلیدس* (حدود ۳۵۰ ق.م.) و *اراتستن* (۱۹۶-۲۷۶ ق.م.)، و در عصر جدید به *مارین مرسن* (۱۶۴۸-۱۵۸۸)، *پیردُفرما* (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، *کریستیان گلدباخ* (۱۷۶۴-۱۶۹۰)، *لئونهارت اویلر* (۱۷۸۳-۱۷۰۷) و *پیتر گوستاو دیریکله* (۱۸۵۹-۱۸۰۵)، اشاره کرد. با وجود همهٔ این تلاش‌ها، مسیر شناخت عددهای اول ناهموار و سنگلاخ است و چند قضیه که به چگونگی توزیع آن‌ها در میان عددهای طبیعی مربوط می‌شوند، و نیز حکم‌های اثبات نشده‌ای که تحت عنوان حدس‌ها یا انگاره‌ها مطرح می‌شوند و تاکنون رد نیز نشده‌اند، قابل توجه‌ترند. در این مقاله، از میان این قضایا و حدس‌ها موارد زیر را بررسی خواهیم کرد:**

**۱. قضیهٔ بنیادی حساب**
**۲. قضیهٔ نامتناهی بودن عددهای اول**
**۳. قضیهٔ عددهای اول**
**۴. حدس اقلیدس درخصوص عددهای اول دوقلو**
**۵. حدس گلدباخ**

## ۱. قضیهٔ بنیادی حساب

می‌دانیم هر عدد صحیح $a>1$ بر $\pm1$ و $\pm a$ بخش‌پذیر است و اگر این‌ها تنها مقسوم‌علیه‌های a باشند، a عددی اول نامیده می‌شود. به بیان دیگر، عددهای اول عددهای صحیح بزرگ‌تر از یک هستند که به غیر از ۱ و خودشان مقسوم‌علیه دیگری ندارند. عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ که اول نباشد، «مرکب» نامیده می‌شود. در میان ده عدد صحیح نخستین تنها ۲، ۳، ۵ و ۷ عددهای اول‌اند و بقیه یعنی ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰ مرکب هستند. توجه کنید که ۲ تنها عدد اول زوج است و عدد صحیح ۱ طبق تعریف نه اول است و نه مرکب.

حال که با تعریف عددهای اول آشنا شدید، به حدود ۲۳۰۰ سال پیش برمی‌گردیم. قضیهٔ چهاردهم از مقالهٔ نهم کتاب «اصول اقلیدس»، حاوی حکمی است که بعدها به قضیهٔ بنیادی حساب معروف شد و حاکی است: هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک، به طریقی که اساساً یکتاست، به حاصل‌ضرب عددهای اول تجزیه می‌شود. طبق این قضیه، هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ به یک و تنها یک روش به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای اول نوشته می‌شود. منظور از «اساساً یکتا» این است که ترتیب نوشته شدن عامل‌ها اهمیتی ندارد. برای مثال، ۵×۳×۲ و ۳×۲×۵ تجزیه‌های متمایزی از عدد ۳۰ محسوب نمی‌شوند. به تجزیه‌های زیر توجه کنید:

۸=۲×۲×۲
۱۵=۳×۵
۱۸=۲×۳×۳
۳۶=۲×۲×۳×۳

همان‌گونه که در برخی تجزیه‌های بالا مشاهده می‌شود، ممکن است بعضی از عددهای اول موجود در تجزیهٔ یک عدد صحیح تکراری باشند؛ مثلاً ۳۶۰=۲×۲×۲×۳×۳×۵. در این‌گونه موارد با گروه‌بندی عددهای اول یکسان، به‌جای هر گروه یک عامل (توانی از عدد اول تکرار شده) قرار می‌دهیم. در این صورت تجزیهٔ ۳۶۰ به‌صورت $2^3\times3^2\times5$ درمی‌آید.

بنا به قضیهٔ بنیادی حساب، عددهای اول نقش اجزای سازنده‌ای را بازی می‌کنند که با ضرب کردن آن‌ها می‌توان تمام عددهای صحیح را ساخت. به‌دلیل همین نقش بنیادین و اساسی، قضیهٔ بنیادی به این نام اطلاق شده است.[۱]

## ۲. تعداد عددهای اول نامتناهی است

برای این حکم اثبات‌های متعددی ارائه شده است. اثبات اقلیدس ساده و مبتنی بر استفاده از برهان خلف است که در کتاب درسی «ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی» آمده است. اثباتی که **اویلر** برای نامتناهی بودن عددهای اول نوشته، مبتنی بر ریاضیات عالی است و برای دانشجویان سال دوم رشتهٔ

ریاضی قابل فهم است. اما یک اثبات جالب و ساده از این قضیه را می‌توان در کتاب «نظریهٔ اعداد»، تألیف **مریم میرزاخانی** پیدا کرد. ضمن دعوت از خوانندگان به مطالعهٔ این کتاب، برهان مربوطه را که در قالب یک مسئله مطرح شده است، در اینجا می‌آوریم:

**مسئله:** فرض کنید n عددی طبیعی باشد و: $n>2$. ثابت کنید دست‌کم یک عدد اول مانند P وجود دارد که: $n<P<n!$.

پیش از پرداختن به حل مسئله یادآوری می‌کنیم که: $n!=1\times2\times3\times...n$ و منظور از $a|b$ که خوانده می‌شود: a، b را عاد می‌کند، یا a، b را می‌شمارد، این است که a مقسوم‌علیه b یا به عبارت دیگر، b مضرب a است.

**حل مسئله:** چون: $n>2$، پس: $n!>2!$ و $n!>2$. در نتیجه: $n!-1>1$. بنا به قضیهٔ بنیادی حساب، $n!-1$ دست‌کم یک مقسوم‌علیه اول مانند P دارد. یعنی حداقل یک عدد اول مانند P وجود دارد که مقسوم‌علیه $n!-1$ است. لذا: $P\leq n!-1$ و در نتیجه: $P<n!$.

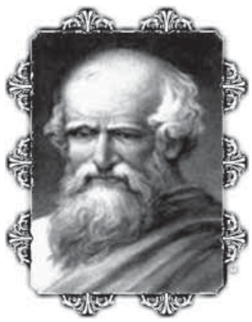
حال فرض کنیم: $P\leq n$ (فرض خلف). در نتیجه P در حاصل‌ضرب $n!=1\times2\times3\times...n$ حضور دارد و مقسوم‌علیه $n!$ است؛ یعنی: $P|n!$. چون P مقسوم‌علیه $n!-1$ است، پس: $P|n!-1$. از $P|n!$ و $P|n!-1$ نتیجه می‌شود: $P|1$ (از $a|b$ و $a|c$ می‌توان $a|b-c$ را نتیجه گرفت) که تناقض است، چون تنها مقسوم‌علیه‌های یک، $\pm1$ هستند و توجه داریم که P اول است. بنابراین: $P>n$.

پس ثابت شد که برای هر عدد صحیح $n>2$، دست‌کم یک عدد اول P وجود دارد که: $n<P<n!$. نتیجهٔ این مسئله آن است که اگر n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از دو باشد، عددی اول وجود دارد که از n بزرگ‌تر است. یعنی تعداد عددهای اول نامتناهی است.

### ۳. حدس اقلیدس

اگر عددهای فرد P و $P+2$ هر دو اول باشند، آن‌ها را زوج عددهای اول دوقلو می‌نامند؛ مانند ۳ و ۵، ۵ و ۷، ۱۱ و ۱۳، ۱۷ و ۱۹، و... اقلیدس حدس زده بود که تعداد زوج عددهای اول دوقلو نامتناهی است؛ حدسی که تاکنون رد نشده، ولی اثباتی نیز برای آن پیدا نشده است. حتماً توجه دارید که حتی اگر فهرست بلند بالایی از این جفت‌ها پیدا کنیم، فقط نشان داده‌ایم که زوج عددهای اول دوقلو، تعدادشان زیاد است. ولی برای اثبات حدس و تبدیل آن به


فیثاغورس


اقلیدس


مارین مرسن


پیردُفرما


کریستیان گلدباخ


پیتر گوستاو دیریکله

یک قضیه، باید ثابت کنیم که این فهرست تا بی‌نهایت ادامه دارد. در حال حاضر با استفاده از رایانه تعداد ۱۵۲/۸۹۲ جفت عدد اول دوقلو کوچک‌تر از ۳۰/۰۰۰/۰۰۰ پیدا شده است. صدهزارمین جفت عددهای اول دوقلو عبارت‌اند از: ۱۸۴۰۹۱۹۹ و ۱۸۴۰۹۲۰۱.

### ۴. قضیهٔ عددهای اول

در ۱۰ عدد طبیعی نخستین، چهار عدد اول وجود دارد. در ۱۰۰ عدد طبیعی نخستین ۲۵ عدد اول وجود دارد و تعداد عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰۰۰ برابر ۱۶۸ عدد است. حکم ثابت شده‌ای درخصوص عددهای اول وجود دارد که به «قضیهٔ عددهای اول» موسوم است. این قضیه تعداد عددهای اول کوچک‌تر یا مساوی یک عدد مفروض را به‌طور تقریبی مشخص می‌کند. با فرض اینکه تعداد عددهای اولی را که از عدد صحیح مفروض N کوچک‌تر یا مساوی هستند، با $\pi(N)$ نشان داده باشیم، قضیه را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

**قضیهٔ عددهای اول:** برای هر عدد صحیح N، $\pi(N)$ به‌طور تقریبی با $\frac{N}{LnN}$ برابر است که $LnN$ همان $Log_e^N$ و e عدد «نپری» است.

**توضیح:** به ازای عدد صحیح مفروض N، $Ln\ N$ از جدول لگاریتم‌ها یا ماشین‌حساب قابل دستیابی است.

این قضیه توسط دو ریاضی‌دان به نام‌های **هادامارد** و **دی‌لاوالی پوسین** در اواخر قرن نوزدهم به‌طور مستقل اثبات شد که هر دو اثبات مبتنی بر ریاضیات عالی هستند.

**بررسی قضیه:** برابر بودن $\pi(N)$ با $\frac{N}{LnN}$ به‌طور تقریبی، این معنا را می‌رساند که هر قدر عدد N بزرگ‌تر باشد، دقت این تقریب بالاتر خواهد بود. به‌عبارت دیگر، با بزرگ و بزرگ‌تر شدن N، خطای مقدار به‌دست آمده از فرمول $\frac{N}{LnN}$ با مقدار واقعی $\pi(N)$، کمتر و کمتر خواهد شد. به زبان حدی، اگر خطای مربوطه را با E نشان دهیم، $N\to\infty$ و $E\to ۰$ را در پی خواهد داشت. اجازه دهید درخصوص محاسبات این مسئله مثالی عددی بزنیم. سپس یک تمرین برای شما و بعد به ازای مقادیر صعودی N جدولی را ترتیب داده‌ایم تا سیر نزولی E را مشاهده کنید.

فرض کنیم $N=۱۰۰$. به سادگی می‌توانید دریابید که تا عدد ۱۰۰، ۲۵ عدد اول داریم.

پس: $\pi(۱۰۰)=۲۵$. حال با قرار دادن $N=۱۰۰$ در فرمول $\frac{N}{LnN}$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰۰}{LnN}=\frac{۱۰۰}{۴/۶۰۵۲}=۲۱/۷۱۲$$

میزان خطا را از رابطهٔ $E=\pi(N)-\frac{N}{LnN}$ محاسبه می‌کنیم:

$$E=\pi(۱۰۰)-\frac{۱۰۰}{Ln۱۰۰}=۲۵-۲۱/۷۱۲=۳/۲۸۸$$

برای محاسبهٔ درصد خطا توجه می‌کنیم که اگر E میزان خطا برای $\pi(N)$ باشد، درصد خطا از تناسب $\frac{E}{\pi(N)}=\frac{?}{۱۰۰}$ محاسبه می‌شود و داریم:

$$\textbf{درصد خطا}=\frac{\pi(N)-\frac{N}{LnN}}{\pi(N)}\times ۱۰۰$$

برای $N=۱۰۰$، درصد خطا برابر است با:

$$\frac{۳/۲۸۸}{۲۵}\times ۱۰۰$$ یا به‌طور تقریبی ۱۳/۱۵٪.

**تمرین:** برای $N=۲۰۰$، $\pi(N)$، $\frac{N}{LnN}$ و E را محاسبه کنید.

و حالا به جدول مقابل دقت کنید.

| N | $\pi(N)$ | $\frac{N}{LnN}$ | E | درصد خطا |
|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۴ | ۴/۳ | -۰/۳ | ۷/۵ |
| $۱۰^{۲}$ | ۲۵ | ۲۱/۷ | ۳/۳ | ۱۳/۲ |
| $۱۰^{۳}$ | ۱۶۸ | ۱۴۵ | ۲۳ | ۱۳/۶ |
| $۱۰^{۴}$ | ۱۲۲۹ | ۱۰۸۶ | ۱۴۳ | ۱۱/۶ |
| $۱۰^{۵}$ | ۹۵۹۲ | ۸۶۸۶ | ۹۰۶ | ۹/۴ |
| $۱۰^{۶}$ | ۷۸۴۹۸ | ۷۲۳۸۲ | ۶۱۱۶ | ۷/۸ |
| $۱۰^{۷}$ | ۶۶۴۵۷۹ | ۶۲۰۴۲۱ | ۴۴۱۵۸ | ۶/۶ |
| $۱۰^{۸}$ | ۵۷۶۱۴۵۵ | ۵۴۲۸۶۸۱ | ۳۳۲۷۷۴ | ۵/۸ |
| $۱۰^{۹}$ | ۵۰۸۴۷۵۳۴ | ۴۸۲۵۴۹۴۲ | ۲۵۹۲۵۹۲ | ۵/۱ |
| $۱۰^{۱۰}$ | ۴۵۵۰۵۲۵۱۱ | ۴۳۴۲۹۴۴۸۲ | ۲۰۷۵۸۰۲۹ | ۴/۶ |
| $۱۰^{۱۱}$ | ۴۱۱۸۰۵۴۸۱۳ | ۳۹۴۸۱۳۱۶۵۴ | ۱۶۹۹۲۳۱۵۹ | ۴/۱ |
| $۱۰^{۱۲}$ | ۳۷۶۰۷۹۱۲۰۱۸ | ۳۶۱۹۱۲۰۶۸۲۵ | ۱۴۱۶۷۰۵۱۹۳ | ۳/۷ |
| $۱۰^{۱۳}$ | ۳۴۶۰۶۵۵۳۶۸۳۹ | ۳۳۴۰۷۲۶۷۸۳۸۷ | ۱۱۹۹۲۸۵۸۴۵۲ | ۳/۴ |

## ۵. حدس گلدباخ

**کریستیان گلدباخ** در سال ۱۷۴۲ در نامه‌ای به **لئونهارد اویلر** این حدس را مطرح کرد که هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت. صورت نسبتاً کلی‌تر حدس این است که هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۴ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول فرد نوشت. به‌سادگی می‌توان صحت حدس فوق را در مورد چند عدد زوج نخست تحقیق کرد.

۴=۲+۲

۶=۳+۳

۸=۳+۵

۱۰=۳+۷

۱۲=۵+۷

۱۴=۷+۷=۳+۱۱

۱۶=۵+۱۱=۳+۱۳

۱۸=۵+۱۳=۷+۱۱

۲۰=۳+۱۷=۷+۱۳

شما هم فهرست بالا را تا هرجا که حوصله‌تان اجازه می‌دهد، ادامه دهید.

مطمئن باشید تا عدد $۱۰^{۸}$، درستی حدس با محاسبات مستقیم به تأیید رسیده است و مشکلی پیش نخواهد آمد! گرچه این مشاهدات گمان درستی حدس گلدباخ را تقویت می‌کنند، اما با اثبات ریاضی آن فاصلهٔ زیادی دارد و همهٔ تلاش‌ها برای اثبات آن با شکست کامل مواجه شده است.

**پی‌نوشت‌ها**

۱. صورت قضیهٔ بنیادی حساب در متن اصلی از زبان اقلیدس بدین صورت است: «اگر عددی کوچک‌ترین عددی باشد که چند عدد اول آن را می‌شمارند، هیچ عدد اول دیگری جز همان‌ها آن را نمی‌شمارد.»


**منابع**

۱. امیری، حمیدرضا (۱۳۸۶). **ورودی به نظریهٔ اعداد**. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ ششم.

۲. بورل، امیل (۱۳۸۱). **عددهای اول**. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر. تهران. چاپ سوم.

۳. برتن، دیویدام (۱۳۸۹). **نظریهٔ مقدماتی اعداد**. ترجمهٔ محمدصادق منتخب. انتشارات دانشگاه تهران. چاپ دوم.

۴. سیمونز، جرج ف (۱۳۷۵). **معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها**. ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر بابایی و دکتر ابوالقاسم میامئی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ ششم.

۵. میرزاخانی، مریم و بهشتی زواره، رویا (۱۳۸۴). **نظریهٔ اعداد**. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی. تهران. چاپ چهاردهم.

6. QUAS. Anthony. Prime Time News. Pi in the Sky. Issu 17, 2013.